ECRICOME

Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles

ESC Bordeaux, ESC Marseille-Provence, ESC Reims, ESC Rouen, ICN Nancy

J. 0695

CONCOURS D'ADMISSION 2000

Option technologique

MATHÉMATIQUES

Lundi 22 mai 2000 de 8 h 00 à 12 h 00

Durée : 4 heures

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 4 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1

On considère les matrices $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

A tout nombre réel x on associe la matrice : $M(x)=I+x\cdot A+\frac{x^2}{2}\cdot A^2$ (1).

1) Calculer A^2 et A^3 et en déduire, pour tout entier n>3, la valeur de A^n.

2) Calculer en utilisant (1) le produit M (x) M (y) et montrer que M (x) M (y) = M (x + y) (2).

3) Montrer que pour tout entier positif n : $(M (x))^n$ = M (nx). Reconnaître M (0).

4) Ecrire les matrices M (x) et $(M (x))^n$ sous forme de tableaux.

5) Justifier l'inversibilité de la matrice M (x) sans chercher à calculer son inverse.

6) Déterminer l'inverse de M (x) en n'utilisant que la relation (2).

7) Soit $B=\begin{pmatrix}1&4&8\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$. Ecrire sous forme de tableaux les matrices B^{-1} et B^n.

8) Retrouver la valeur de B^{-1} en utilisant la méthode du pivot.

Exercice 2

1) Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire Y suivant la loi uniforme sur [0 , 1].

Trois personnes ont convenu de se retrouver à la gare pour emprunter le même train de banlieue.

L'origine des temps est prise à 17 h et l'unité de temps est l'heure.

Pour k appartenant à { 1 , 2 , 3 }, on désigne par Y_k l'heure d'arrivée de la personne numéro k. On suppose que les trois variables Y_k sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur [0 , 1] (ce qui signifie que les trois personnes arrivent au hasard entre 17 h et 18 h).

2) On note X la variable aléatoire représentant l'heure d'arrivée de la **dernière** personne (qui n'est pas forcément la personne numéro 3 !).

a) Soit t un réel appartenant à [0 , 1].

Exprimer l'événement ($X \leq t$) en fonction des événements ($Y_1 \leq t$) , ($Y_2 \leq t$) , ($Y_3 \leq t$).

b) En déduire la fonction de répartition de X qu'on notera G.

c) Déterminer une densité de X et l'espérance de X.

3) Les personnes peuvent emprunter trois trains à 17 h 20 , 17 h 40 et 18 h (ce qui correspond, dans le repère de temps choisi, aux instants 1/3 , 2/3 et 1).

Pour j appartenant à { 1 , 2 , 3 } on appelle E_j l'événement : " Les trois personnes prennent le j-ième train ".

Exprimer l'événement E_j à l'aide de la variable aléatoire X puis calculer sa probabilité.

4) On désigne par A l'événement : " La première personne arrivée attend moins de 20 minutes avant de monter dans le train avec ses amis ".

a) Exprimer les événements $A \cap E_1$, $A \cap E_2$, $A \cap E_3$ en fonction des variables Y_1 , Y_2 , Y_3.

b) Déterminer alors la probabilité de A.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{2-\ln(x)}$.

1) a) Montrer que le domaine de définition de f est l'intervalle $]0 , e^2]$.

b) Déterminer les limites de f aux bornes de ce domaine.

2) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

3) Montrer que l'image par f de l'intervalle [1 , e] est contenue dans l'intervalle [1 , e] .

4) Montrer que l'équation f (x) = x admet une solution unique a sur l'intervalle [1 , e] .

(On pourra utiliser la fonction auxilliaire g définie par : $g(x) = x^2 + \ln(x) - 2$).

5) Comment obtenir graphiquement une valeur approchée de a au moyen de la courbe tracée au 2) ?

6) On considère la suite définie par récurrence pour tout entier naturel n par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que : $|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2}|u_n - a|$.

b) Déterminer un entier n tel que $|u_n - a| < 10^{-2}$.

c) Quelle est la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$?

FIN DE L'ÉPREUVE

IMPRIMERIE NATIONALE. – D'après documents fournis.